oder wenn man umgekehrt die Kreisringplatte feststehen läßt und mit der Lochblende im Feld ihrer Beugungsfigur umherwandert, hoffen wir später noch in einigen Aufnahmen vollständiger zu illustrieren.

8. Es ist seltsam, daß der Versuch an den unregelmäßig verteilten Kreisringen noch nicht bekannt ist. Nirgends ließ sich eine Erwähnung auffinden. Und wenn er irgendwo an entlegener Stelle beschrieben sein sollte, ist er nicht gebührend beachtet worden. Es scheint, daß er deswegen unterblieb, weil man sich aus den im 4. Abschnitt besprochenen Gründen nur von regelmäßigen gitterartigen Ringanordnungen etwas versprach. Indem er diese gerade vermeidet, zeigt er mit vielfacher Lichtstärke das Beugungsbild vom Rand der einfachen Blende und des Schirms. So zeigt ja auch eine mit winzigen Kugeln bestäubte Glasplatte mit ihren diffusen Beugungsringen im Grunde das Beugungsbild der Einzelkugel. Hier an dem überlagerten Gesamtbild streng konzentrischer, nach Radius und Stärke aber statistisch verteilter Kreisringe wird sichtbar, was für den Kreisrand als solchen bezeichnend ist.

Man kann gerade dadurch, daß nicht nur in subjektiver Beobachtung einzelne Randpunkte sichtbar werden, sondern objektiv vorführbar ganze Speichen oder Felder der Kreisscheiben aufleuchten, und daran, daß die Achse erhellt erscheint, manches eindringlicher anschaulich machen, was bisher entlegen schien. An Hand des Ellipsoidmodells erläutert, wird so z. B. auch der Satz vom Reflexionskegel an deutlichen Erscheinungen lebendig.

So kann der Versuch dazu helfen, die Vorstellungen und Begriffe zu festigen, die man auf diesem Gebiet einzusetzen hat, das in historischen Leistungen seine Prägung erfuhr, aber augenscheinlich durchaus noch verdient, daß man sich darum bemüht. Am wichtigsten ist wohl die Aufgabe, den Vorgang im klassischen Fresnel-Arago-Versuch zu erläutern, der selbst für jede Demonstration zu lichtschwach ist, einem großen Kreis nur indirekt — in Aufnahmen — vorgeführt werden kann, der aber gerade für den großen Kreis wichtig ist. Denn man kann gerade Laien, denen Spalt und Gitter ja schon ungewohnte künstliche Einrichtungen sind, ein schattenwerfender Schirm aber vertraut vorkommt, die Notwendigkeit der Wellentheorie nicht eindringlicher zeigen als an der Tatsache, daß hinter einem kreisförmigen Schirm die Mitte des Schattens sich erhellt.

Zur Formulierung des Huygensschen Prinzips

VON WALTER FRANZ[1]

(Z. Naturforschg. 3 a, 500—506 [1948]; eingegangen am 29. Juli 1948)

Mit Hilfe der Greenschen Dyade wird eine Formulierung des Huygensschen Prinzips für elektromagnetische Wellen abgeleitet, welche, ebenso wie die Kirchhoffsche Formel der skalaren Theorie, sofort erkennen läßt, daß für beliebige „Randwerte" die Wellengleichungen erfüllt werden. Doch erscheint die Kirchhoffsche Theorie nicht als Lösung einer Randwertaufgabe, sondern eines Sprungwertproblems. Im Gegensatz zu Kottler[2] wird dabei der Sprungwert als Grundzug der Kirchhoffschen Theorie, nicht als Eigenschaft des „schwarzen" Schirmes interpretiert.

An anderer Stelle[3] habe ich ein sukzessives Näherungsverfahren zur Lösung von Beugungsaufgaben angegeben, nach welchem man zuerst die Wellengleichung ohne Rücksicht auf die Randbedingungen löst, dann in willkürlicher — jedoch plausibler — Weise die Lösung den Randbedingungen anpaßt, wodurch die Wellengleichung verletzt wird; dieser Verstoß wird durch eine Beugungswelle in Ordnung gebracht. Sie bestimmt sich aus einer inhomogenen Wellengleichung, welche durch die bekannten Integralformeln für Potential und Vektorpotential gelöst wird. Die Formeln für die Kirchhoffsche Beugungstheorie (und damit für das Huygenssche Prinzip) ergeben sich daraus durch Spezialisierung.

[1] Münster i. W., Gertrudenstr. 3.
[2] F. Kottler, Ann. Physik **70**, 405 [1923]; **71**, 457 [1923].
[3] W. Franz, Zur Theorie der Beugung, Z. Physik, im Druck.

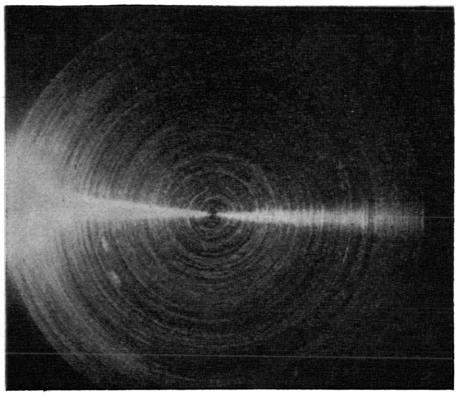

Abb. 2. Das Speichenphänomen. Auf jedem Ring leuchten die Punkte größter und kleinster Lichtzeit.

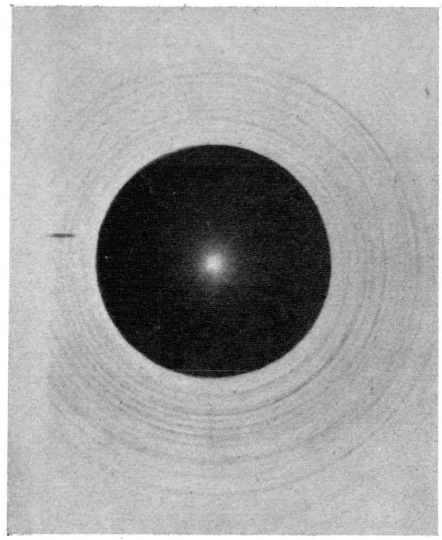

Abb. 3. Beugung am statistischen Ringsystem. Außen die Schatten der Ringspuren, inmitten des Schattens des die Mitte bedeckenden Kreisschirms der Brennfleck.

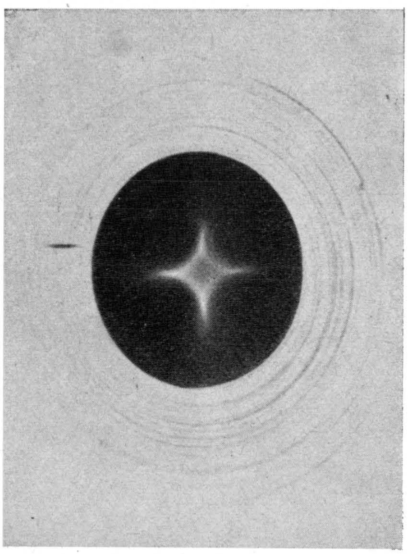

Abb. 4. Das beugende System von Abb. 3 ist um eine vertikale Achse gedreht: die Schatten erscheinen elliptisch, die Beugungsfigur zu einer Kaustik umgeformt.

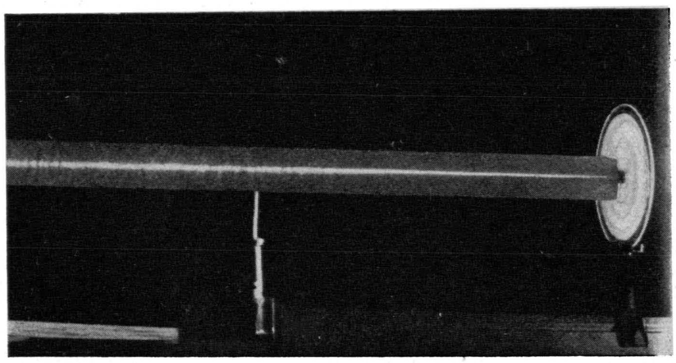

Abb. 5. Die Brennachse auf langem Papierschirm.

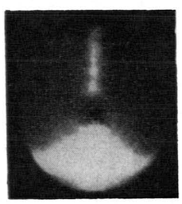

Abb. 7. Lochkamerabild vom vertikalen Ast der Ellipsen-Beugungsfigur (Abb. 4).

Ziel der vorliegenden Mitteilung ist, auf Grund der angegebenen Auffassung das Huygenssche Prinzip *direkt* zu formulieren und von hier aus einige beugungstheoretische Fragen neu zu beleuchten.

Für die skalare Wellengleichung ist die Kirchhoffsche Integralformel, klar und handlich, der angemessene Ausdruck des Huygensschen Prinzips. Für elektromagnetische Wellen hat man bisher[4] die Kirchhoffsche Formel durch Randintegrale ergänzt, um auch für genäherte Randwerte die Erfüllung der Maxwellschen Gleichungen zu erreichen. Da die Formeln dadurch unübersichtlich und unhandlich werden, habe ich[3] sie so umgeformt, daß reine Flächenintegrale entstehen, welche klar und einfach sind. Diese einfache — und sicher einzig angemessene — Gestalt der Kirchhoffschen Integrale ergibt sich bei der folgenden Ableitung direkt und ungezwungen. Indem man — ohne die Rechnung zu erschweren — beliebige und beliebig variable Materialeigenschaften zulassen kann, erhält man nebenbei die allgemeinste Formulierung der optischen Reziprozität.

1. Greensche Funktion und Greensche Dyade

Eine *Schallwelle* der Frequenz ω in einer Flüssigkeit wird durch die folgende Wellengleichung für den Überdruck p beherrscht:

$$\left\{\operatorname{div} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} + \frac{1}{\varrho} k^2\right\} p = 0 . \tag{1}$$

ϱ ist die Dichte des unerregten Mediums, $k = \omega \sqrt{d\varrho/dp}$ die Wellenzahl und $d\varrho/dp$ der für den Ruhezustand gültige Wert der Dichteänderung pro Druckzunahme, welcher sich aus der Zustandsgleichung ergibt. Aufgabe der Beugungstheorie ist, die Greensche Funktion $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ zu finden, welche den Überdruck angibt, welcher in einem Aufpunkte P durch eine in Q befindliche „Einheitsquelle" erregt wird. Die Einheitsquelle wird definiert durch die inhomogene Wellengleichung

$$\left\{\operatorname{div}_{\mathrm{P}} \alpha(\mathrm{P}) \operatorname{grad}_{\mathrm{P}} + \beta(\mathrm{P})\right\} G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = -\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) . \tag{2}$$

$\delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ ist die Diracsche δ-Funktion, also $\delta = 0$, wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ und $\int \delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\, d\tau_{\mathrm{P}} = 1$. Die Bedeutung der Abkürzungen ist ersichtlich $\alpha = 1/\varrho$ und $\beta = k^2/\varrho$.

Ist das Medium homogen, dann läßt sich $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ explizit angeben; man hat die einfache Kugelwelle, also für $\alpha = 1$, $\beta = k^2$:

$$G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{e^{i k r_{\mathrm{PQ}}}}{4 \pi r_{\mathrm{PQ}}}, \tag{3}$$

mit r_{PQ} = Abstand P—Q.

Eine *elektromagnetische Welle* gehorcht den Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = -i \omega \varepsilon \mathfrak{E}; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = i \omega \mu \mathfrak{H} . \tag{4}$$

Wie üblich bezeichnet darin $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathfrak{H}$ die magnetische Erregung, während $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ die elektrische Erregung und $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ die magnetische Induktion sind, und ε, μ (beide dimensionsbehaftet) Dielektrizitätskonstante und Permeabilität. Durch Elimination folgen aus den Maxwellschen Gleichungen die Wellengleichungen.

$$\begin{aligned} &\left\{\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} - \varepsilon \omega^2\right\} \mathfrak{E} = 0 ; \\ &\left\{\operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} - \mu \omega^2\right\} \mathfrak{H} = 0 . \end{aligned} \tag{5}$$

Wir wollen für das Folgende $\mathfrak{E}$ als „Wellenfunktion" wählen und $\mathfrak{H}$ vermittels der zweiten Maxwellschen Gleichung als Ableitung der Wellenfunktion definieren.

Das elektromagnetische Beugungsproblem wird nicht durch eine vektorielle Greensche Funktion gelöst, da die einfachste „Einheitsquelle" der Hertzsche Dipol ist, die Erregung in P somit von der Schwingungsrichtung des Dipols Q abhängt. Eine lineare Vektorfunktion, die *Greensche Dyade*[5] $\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$, benötigt man, um die Erregung in P aus der Schwingungsrichtung $\mathfrak{e}$ des Einheits-Dipols Q zu ermitteln gemäß

$$\mathfrak{E}(\mathrm{P}) = \Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \cdot \mathfrak{e} . \tag{6}$$

Für homogene Medien kann man als magnetischen Dipol explizit ansetzen

$$\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \frac{e^{i k r_{\mathrm{PQ}}}}{4 \pi r_{\mathrm{PQ}}} I \mu , \tag{7}$$

(I = Einheitsdyade).

[4] S. etwa Stratton u. Chu, Physic. Rev. **56**, 99 [1939].

[5] S. dazu etwa Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Springer 1937, Bd. I, Kap. 5, § 12, Ziff. 13.

Elektrische Dipole brauchen wir nicht eigens anzusetzen, da sie als Ableitung (rot) aus magnetischen gewonnen werden.

Die Wellenzahl k bestimmt sich aus $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2$. Wendet man auf $\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ nach (7) den Operator der Wellengleichung (5) an und beachtet, daß wegen der Divergenzfreiheit von Γ rotrot durch $-\Delta$ ersetzt werden kann, dann ergibt sich mit Rücksicht auf (2) die inhomogene Wellengleichung

$$\left\{\mathrm{rot}_{\mathrm{P}} \frac{1}{\mu(\mathrm{P})} \cdot \mathrm{rot}_{\mathrm{P}} - \varepsilon(\mathrm{P}) \cdot \omega^2\right\} \Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\, \delta(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\, I . \tag{8}$$

Wenn ε und μ nicht konstant sind, dann läßt sich die Greensche Dyade nicht explizit angeben, doch die Bestimmungsgleichung (8) für $\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ können wir beibehalten, da in der unmittelbaren Umgebung des Punktes Q (wo allein die rechte Seite von Null verschieden ist) ε und μ als konstant angesehen werden können.

2. Der Greensche Satz

Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt in bekannter Weise der Greensche Satz (das Flächenelement dv_{J} habe dabei die Richtung der *inneren* Normalen):

$$\int d\tau_{\mathrm{J}} \left\{ G(\mathrm{J}, \mathrm{Q})\, \nabla_{\mathrm{J}} \cdot a(\mathrm{J})\, \nabla_{\mathrm{J}}\, G(\mathrm{J}, \mathrm{P}) - G(\mathrm{J}, \mathrm{P})\, \nabla_{\mathrm{J}} \cdot a(\mathrm{J})\, \nabla_{\mathrm{J}}\, G(\mathrm{J}, \mathrm{Q}) \right\} = -\int dv_{\mathrm{J}} \cdot a(\mathrm{J}) \left\{ G(\mathrm{J}, \mathrm{Q})\, \mathrm{grad}_{\mathrm{J}}\, G(\mathrm{J}, \mathrm{P}) - G(\mathrm{J}, \mathrm{P})\, \mathrm{grad}_{\mathrm{J}}\, G(\mathrm{J}, \mathrm{Q}) \right\}. \tag{9}$$

Für die Dyade ergibt sich analog aus dem verallgemeinerten Gaußschen Integralsatz[6] $\int d\tau_{\mathrm{J}} \nabla_{\mathrm{J}} = -\int dv_{\mathrm{J}}$

$$\int d\tau_{\mathrm{J}} \left\{ \bar{\Gamma}(\mathrm{J}, \mathrm{Q}) \times \vec{\nabla}_{\mathrm{J}} \cdot \frac{1}{\mu(\mathrm{J})} \cdot \vec{\nabla}_{\mathrm{J}} \times \Gamma(\mathrm{J}, \mathrm{P}) - \bar{\Gamma}(\mathrm{J}, \mathrm{Q}) \times \overleftarrow{\nabla}_{\mathrm{J}} \cdot \frac{1}{\mu(\mathrm{J})} \cdot \overleftarrow{\nabla}_{\mathrm{J}} \times \Gamma(\mathrm{J}, \mathrm{P}) \right\} = -\int \left\{ \bar{\Gamma}(\mathrm{J}, \mathrm{Q}) \times dv_{\mathrm{J}} \cdot \frac{1}{\mu(\mathrm{J})} \cdot \mathrm{rot}_{\mathrm{J}}\, \Gamma(\mathrm{J}, \mathrm{P}) + \overline{\mathrm{rot}_{\mathrm{J}}\, \Gamma(\mathrm{J}, \mathrm{Q})} \cdot \frac{1}{\mu(\mathrm{J})} \cdot dv_{\mathrm{J}} \times \Gamma(\mathrm{J}, \mathrm{P}) \right\}. \tag{10}$$

Wir haben die Formel so geschrieben, daß für ε und μ auch symmetrische *Dyaden* stehen können (anisotrope Medien). Die Faktoren dürfen wegen des Dyadencharakters von Γ und $\bar{\Gamma}$ nicht vertauscht werden ($\bar{\Gamma}$ ist die konjugierte Dyade, bei welcher also gegenüber Γ links und rechts vertauscht ist). Das Symbol $\vec{\nabla}$ soll eine auf alle rechten, $\overleftarrow{\nabla}$ auf alle linken Faktoren wirkende Differentiation bedeuten.

Erstrecken wir die Integrale über den gesamten unendlichen Raum, dann verschwinden die Oberflächenintegrale, wenn G und Γ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen

$$\lim_{|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}| \to \infty} |\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}| \left(\mathrm{grad}_{\mathrm{P}} - i\, k_{\infty} \frac{\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}}{|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}|} \right) G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0 . \tag{11}$$

Wir haben dabei vorauszusetzen, daß die Wellenzahl im Unendlichen überall einen konstanten Grenzwert k_{∞} besitzt. Um das Verschwinden der Oberflächenintegrale einzusehen, beachte man, daß G und Γ im Unendlichen wie $1/|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}|$ verschwinden, daß man ∇_{J} nach (11) durch $i k_{\infty} \frac{\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}}{\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}} [1 + 0(1/|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}|)]$ ersetzen kann, und daß Γ divergenzfrei ist, also $\frac{\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}}{|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}|} \Gamma = 0(1/|\mathfrak{r}_{\mathrm{P}}|^2)$. Wendet man auf die Raumintegrale in (9) und (10) die Wellengleichung (2) bzw. (8) an, dann ergibt sich

$$G(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = G(\mathrm{P}, \mathrm{Q}), \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{Q}}\, \Gamma(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = \overline{\mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\, \Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q})} \tag{13}$$

(nach partieller Integration).

Damit ist gleichzeitig die Reziprozität wie die Eindeutigkeit der Greenschen Funktion und der Greenschen Dyade evident. [Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß $G(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$ irgendeine beliebige Greensche Funktion sein kann, der nach (12) jede andere $G(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ gleich sein muß.] Im optischen Fall tritt dabei nicht die Dyade der elektrischen Feldstärke, sondern deren rot auf, welche (bis auf den konstanten Faktor $i\omega$) die Dyade der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ ist; diese geht bei Vertauschung von Auf- und Quellpunkt in die konjugierte Dyade über, was seinen guten Sinn hat: enthält die $\mathfrak{B}$-Dyade eine Drehung, dann muß diese bei Umkeh-

[6] S. Lagally, Vektorrechnung, Leipzig 1934, S. 135.

rung des Strahlenganges rückgängig gemacht werden — und dies leistet gerade die konjugierte Dyade. Hätten wir als Greensche Dyade nicht den magnetischen, sondern den elektrischen Dipol angesezt, dann bekämen wir die Reziprozität für die $\mathfrak{D}$-Dyade.

Man kann aus (13) folgern, daß für $P \neq Q$ die Funktion $\bar{\Gamma}(Q,P)$ der für $\mathfrak{B}$ gültigen Wellengleichung gehorcht. Es ist nämlich nach (8), (13):

$$\varepsilon(Q)\cdot\omega^2\,\Gamma(Q,P) = \mathrm{rot}_Q\,\frac{1}{\mu(Q)}\cdot\mathrm{rot}_Q\,\Gamma(Q,P)$$

$$= \mathrm{rot}_Q\,\frac{1}{\mu(Q)}\cdot\overline{\mathrm{rot}_P\,\Gamma(P,Q)}\,,$$

also

$$\bar{\Gamma}(Q,P) = \overline{\frac{1}{\omega^2\,\varepsilon(Q)}\cdot\mathrm{rot}_Q\,\frac{1}{\mu(Q)}\cdot\overline{\mathrm{rot}_P\,\Gamma(P,Q)}}\,.$$

Das Konjugierte zu einem Produkt erhält man, indem man die Reihenfolge der Faktoren umkehrt und von jedem Faktor das Konjugierte bildet; für jede vektorielle Multiplikation ergibt die Vertau-

wird

schung der Faktoren einen Vorzeichenwechsel. So

$$\bar{\Gamma}(Q,P) = -\,\mathrm{rot}_P\,\Gamma(P,Q)\cdot\frac{1}{\mu(Q)}\times\overleftarrow{\nabla}_Q\cdot\frac{1}{\omega^2\,\varepsilon(Q)}\,.$$

Dies genügt der für $\mathrm{rot}_P\,\Gamma(P,Q)$, also für $\mathfrak{B}$, zuständigen Wellengleichung

$$\left\{\mathrm{rot}_P\,\frac{1}{\varepsilon(P)}\cdot\mathrm{rot}_P\,\frac{1}{\mu(P)} - \omega^2\right\}\bar{\Gamma}(Q,P) = 0\,, \quad \text{für } P \neq Q. \tag{14}$$

3. Die Kirchhoffschen Integrale

Erstrecken wir die Raumintegrale (9) und (10) nur über ein endliches Raumgebiet V, begrenzt durch eine oder mehrere Flächen F, und setzen statt $G(J,Q)$ bzw. $\bar{\Gamma}(J,Q)$ irgendeine in ganz V reguläre Lösung der Wellengleichung ein, welche wir $u(J)$ bzw. $\mathfrak{E}(J)$ nennen, dann ergibt die Raumintegration in (9) $u(P)$, in (10) $\mathfrak{E}(P)$, sofern P in V gelegen ist, und Null, wenn P außerhalb V liegt. Aus (9) ergibt sich so die etwas verallgemeinerte Kirchhoffsche Formel

$$\left.\begin{matrix} u(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \int_F dv_J\cdot a(J)\,\{u(J)\,\mathrm{grad}_J\,G(P,J) - G(P,J)\,\mathrm{grad}_J\,u(J)\}\,. \tag{15}$$

Aus (10) erhalten wir zunächst

$$\left.\begin{matrix} i\omega\,\mathfrak{B}(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \int_F \left\{\mathfrak{E}(J)\times dv_J\cdot\frac{1}{\mu(J)}\cdot\mathrm{rot}_J\,\Gamma(J,P) + i\omega\,\mathfrak{B}(J)\cdot\frac{1}{\mu(J)}\cdot dv_J\times\Gamma(J)\right\}. \tag{16}$$

Um ersichtlich zu machen, daß das Integral die Maxwellschen Gleichungen erfüllt, bringen wir die auftretenden Greenschen Dyaden nach links, nach der für eine Dyade Φ und einen Vektor $\mathfrak{A}$ gültigen Regel $\mathfrak{A}\cdot\Phi = \bar{\Phi}\cdot\mathfrak{A}$. Wir erhalten unter Benützung von (13)

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{B}(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \int \bar{\Gamma}(J,P)\cdot dv_J\times\mathfrak{H}(J) + \frac{1}{i\omega}\,\mathrm{rot}_P\int\Gamma(P,J)\cdot\frac{1}{\mu(J)}\cdot dv_J\times\mathfrak{E}(J)\,. \tag{17}$$

$\mathfrak{E}(P)$ können wir daraus mittels der ersten Maxwellschen Gleichung berechnen:

Wir setzen hierin (17) ein und wenden auf $\Gamma(P,J)$ die homogene Wellengleichung an:

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{E}(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \int\Gamma(P,J)\cdot\frac{1}{\mu(J)}\cdot dv_J\times\mathfrak{E}(J) - \frac{1}{i\omega\,\varepsilon(P)}\cdot\mathrm{rot}_P\,\frac{1}{\mu(P)}\cdot\int\bar{\Gamma}(J,P)\cdot dv_J\times\mathfrak{H}(J)\,. \tag{18}$$

4. Das Huygenssche Prinzip

Die Kirchhoffschen Integrale können als der mathematische Ausdruck des Huygensschen Prinzips aufgefaßt werden. Eine Wellenfunktion u, welche in V regulär ist, muß, um nicht identisch zu verschwinden, außerhalb von V Quellen besitzen; sie stellt also ein Welle dar, welche durch die Oberfläche F nach V eingestrahlt wird. Man belegt nun die Fläche F mit Polen der Dichte $\partial u/\partial n$ (n = Normale) und mit senkrecht zur Oberfläche gerichteten Dipolen der Dichte $-u$; deren Strahlung ins Innere von V hinein ist nach (15) gleich u, während sie sich im Außenraum weginterferiert. Die durch die außerhalb V gelegenen Strahlungsquellen auf der Fläche F hervorgerufene Erregung kann somit als Ursache der sich weiter fortpflanzenden Ausstrahlung angesehen werden (Huygenssches Prinzip).

Elektrodynamisch entspricht der auf F ankommenden Erregung eine Belegung mit magnetischen Dipolen der Belegungsdichte und -richtung $1/\mu \cdot \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{n}$ = Einheitsvektor der Normalen) und mit elektrischen Dipolen der Dichte und Richtung $1/\varepsilon \cdot \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}$, welche nach (16), (17) in V die ursprüngliche Strahlung erzeugen, und außerhalb sich durch Interferenz vernichten. Von den Feldgrößen $\mathfrak{E}(J)$ und $\mathfrak{H}(J)$ gehen ersichtlich nur die Anteile parallel zur Oberfläche ein. Die Normalkomponenten sind vermittels der Maxwellschen Gleichungen durch diese bestimmt.

Die angegebenen Formeln für das Huygenssche Prinzip kann man dann anwenden, wenn man die Randwerte auf einer geschlossenen Fläche kennt. Die Kirchhoffsche Beugungstheorie dagegen setzt genäherte Randwerte an Stelle der wirklichen ein. Das geht nur deshalb gut, weil die Kirchhoffschen Integrale für *beliebige* Randwerte die Wellengleichung lösen — da nämlich die darin enthaltenen Greenschen Funktionen bzw. Dyaden dies tun, auf Grund der Wellengleichungen (2), (8) und (14) (beachte, daß stets $J \neq P$!). Allerdings reproduzieren sich dabei die Randwerte nicht, und außerhalb von V ergibt sich nicht Null. Doch erleiden auch jetzt die Integrale bzw. ihre Ableitungen beim Durchgang durch die Oberfläche F unstetig einen Zuwachs, welcher genau gleich den zugrunde gelegten Randwerten ist. Wir behaupten demnach, daß für beliebige Funktionen $M(J)$, $N(J)$ bzw. $\mathfrak{M}(J)$ und $\mathfrak{N}(J)$ gilt:

Die Größe

$$u_K(P) = \int_F dv_J \cdot a(J) \{ M(J) \operatorname{grad}_J G(P,J) - N(J)\, G(P,J) \} \tag{19}$$

erleidet beim Eintritt nach V die unstetigen Änderungen

$$\delta u_K = M, \qquad \delta \frac{\partial u_K}{\partial n} = N.$$

Ebenso besitzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_K(P) &= \int_F \Gamma(J,P) \cdot dv_J \times \mathfrak{N}(J) + \frac{1}{i\omega} \operatorname{rot}_P \int \Gamma(P,J) \cdot \frac{1}{\mu(J)} \cdot dv_J \times \mathfrak{M}(J), \\ \mathfrak{E}_K(P) &= \int_F \Gamma(P,J) \cdot \frac{1}{\mu(J)} \cdot dv_J \times \mathfrak{M}(J) - \frac{1}{i\omega\varepsilon(P)} \cdot \operatorname{rot}_P \frac{1}{\mu(P)} \cdot \int \Gamma(J,P) \cdot dv_J \times \mathfrak{N}(J) \end{aligned} \tag{20}$$

beim Eintritt nach V die Unstetigkeiten

$$\delta \mathfrak{E}_{K\parallel} = \mathfrak{M}_\parallel; \qquad \delta \mathfrak{H}_{K\parallel} = \mathfrak{N}_\parallel$$

($\parallel$ = Anteil $\parallel$ Oberfläche).

Um diese Behauptungen zu beweisen, betrachten wir getrennt den Innenraum V und den Außenraum, welcher durch die Fläche F von V getrennt wird. In beiden Räumen ist u_k bzw. $\mathfrak{E}_k$, $\mathfrak{B}_k$ eine reguläre Lösung der homogenen Wellengleichung. Wir definieren nun eine innere und eine äußere Wellenfunktion u_i und u_a; die erste sei in V gleich u_k, und außerhalb gleich Null, die zweite in V gleich Null, und außerhalb gleich u_k. Setzen wir nun in (15) die inneren Randwerte von u_i ein, dann ergibt sich als Wert des Integrals wieder u_i. Setzen wir die äußeren Randwerte von u_a ein, dann wird das Integral $= -u_a$ (das negative Vorzeichen erscheint, weil die Normale im Außenraum entgegengesetzt gerichtet ist). Setzen wir daher in (19) statt M und N ein $u_i - u_a$ und $\frac{\partial}{\partial n}(u_i - u_a)$, dann liefert das Integral innen wie außen den Wert u_k. Daraus folgt, daß $M = u_i - u_a$ sein muß und $N = \frac{\partial}{\partial n}(u_i - u_a)$; denn zwei Pol-Dipol-Verteilungen auf einer Fläche können nur dann im ganzen Raum die gleiche Ausstrahlung liefern, wenn sie identisch sind. — Ebenso beweist man die behaupteten Unstetigkeiten für $\mathfrak{E}_k$ und $\mathfrak{H}_k$.

Das Kirchhoffsche Integral ist somit diejenige Lösung der Wellengleichung, welche auf einer Fläche F vorgegebene Unstetigkeiten $\delta u = M$, $\delta \frac{\partial u}{\partial n} = N$ bzw. $\delta \mathfrak{E}_\parallel = \mathfrak{M}_\parallel$, $\delta \mathfrak{H}_\parallel = \mathfrak{N}_\parallel$ besitzt, und im übrigen Raum regulär ist.

Ersichtlich besteht ein enger Zusammenhang zwischen dieser Darstellung und dem Kottlerschen „Sprungwertproblem". Hierauf gehen wir in Abschn. 6 näher ein.

5. Kirchhoffsche Beugungstheorie

Gegenstand der Kirchhoffschen Theorie ist die Beugung an einem undurchsichtigen Schirm mit Öffnungen, welcher in ein homogenes, isotropes Medium eingebettet ist. Von der einen Seite wird er getroffen durch eine Primärstrahlung u_0 bzw. $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$. Wir *schneiden* nun diese Primärstrahlung *in der Öffnung ab.* Die Unstetigkeit der Schnittfläche wird ausgeglichen durch die Beugungswelle, deren Funktion gleich dem Kirchhoffschen Integral ist, mit $M = u_0$, $N = \partial u_0/\partial n$ bzw. $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0$. Für die Greensche Funktion des unendlichen Raumes können wir (3), für die Greensche Dyade (7) einsetzen. Die Kirchhoffschen Integrale lauten dann

$$u_K(\mathrm{P}) = \int\limits_{\text{Öffnung}} dv_J \cdot \{u_0(\mathrm{J})\,\mathrm{grad}_J\, G(\mathrm{P},\mathrm{J}) - G(\mathrm{P},\mathrm{J})\,\mathrm{grad}_J\, u_0(\mathrm{J})\},$$

$$\mathfrak{E}_K(\mathrm{P}) = \mathrm{rot}_P \int\limits_{\text{Öffnung}} dv_J \times \mathfrak{E}_0(\mathrm{J})\, G(\mathrm{P},\mathrm{J}) - \frac{1}{i\,\omega\,\varepsilon}\,\mathrm{rot}_P\,\mathrm{rot}_P \int\limits_{\text{Öffnung}} dv_J \times \mathfrak{H}_0(\mathrm{J})\, G(\mathrm{P},\mathrm{J}), \tag{21}$$

$$\mathfrak{H}_K(\mathrm{P}) = \mathrm{rot}_P \int\limits_{\text{Öffnung}} dv_J \times \mathfrak{H}_0(\mathrm{J})\, G(\mathrm{P},\mathrm{J}) + \frac{1}{i\,\omega\,\mu}\,\mathrm{rot}_P\,\mathrm{rot}_P \int\limits_{\text{Öffnung}} dv_J \times \mathfrak{E}_0(\mathrm{J})\, G(\mathrm{P},\mathrm{J}).$$

Die vektoriellen Funktionen gleichen die Unstetigkeiten der Tangentialkomponenten der abgebrochenen Welle aus; doch gilt das gleiche dann auch für die Normalkomponenten, da diese, wie bemerkt, über die Maxwellschen Gleichungen sich eindeutig aus den längs der Fläche vorgegebenen Tangentialkomponenten bestimmen.

Die angegebene Gestalt der *vektoriellen* Kirchhoffschen Beugungsformeln unterscheidet sich bedeutend von der bisher gewohnten, und zwar dadurch, daß sie eine einfache, klar übersehbare Gestalt besitzt, für beliebige $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ in ersichtlicher Weise die Maxwell-Gleichungen erfüllt und ebenso ersichtlich nur von den Tangentialkomponenten dieser Größen abhängt. Daß $\mathfrak{E}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ die Maxwellschen Gleichungen (4) erfüllen, folgt sofort daraus, daß $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$ und $(\Delta + k^2)\, G = 0$. Man kann daher rot rot ersetzen durch $\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + k^2$; (4) gilt identisch.

Die Kirchhoffsche Beugungstheorie nimmt keine Rücksicht auf die Oberflächeneigenschaften des Schirmes; sie ist daher, obwohl eine exakte Lösung der Wellengleichung, doch nur eine grobe Näherung für das Beugungsproblem. Um sie zu verbessern, muß man die primäre wie die gebeugte Welle an den Oberflächen reflektieren lassen, jedoch unmittelbar nach der Reflexion „abbrechen", um die weitere Ausbreitung wieder aus dem Huygensschen Prinzip, also der Kirchhoffschen Formel, zu entnehmen. Doch sei hierauf nicht weiter eingegangen, sondern auf die allgemeinere Formulierung dieser Aufgaben in der zitierten Arbeit des Verf. hingewiesen.

6. Schwarze Oberfläche und Sprungwert-Aufgabe

Kottler[2] definiert den schwarzen Schirm dadurch, daß dort an Stelle einer Randbedingung die Funktion und ihre Ableitungen Unstetigkeiten der Größe $-u_0$ und $-\partial u_0/\partial n$ erleiden. Mathematisch ist dies genau dasselbe wie unsere Formulierung der Kirchhoffschen Beugung; wir schneiden nämlich die Primärwelle am Schirm ab, was eine Unstetigkeit $-u_0$, $-\partial u_0/\partial n$ ergibt, und gleichen die Unstetigkeit in der Öffnung durch Hinzufügen der Beugungswelle aus. Es verbleibt also gerade die Kottlersche „Sprungweite" am Schirm. Der Unterschied ist der, daß wir ganz bewußt eine erste *Näherung* berechnet haben, während Kottler behauptet, ein *exaktes* (wenn auch idealisiertes) Beugungsproblem vor sich zu haben. Wir haben als einzige Eigenschaft des Schirmes die benützt, daß er für die Primärstrahlung undurchlässig ist, dagegen haben wir keine Rückicht darauf genommen, daß er auch die gebeugte Welle absorbiert oder die primäre und gebeugte Strahlung reflektiert. Diese Fehler können in einer zweiten Näherung (s. W. Franz[3]) korrigiert werden; doch kann man sie nicht durch eine Idealisierung der Oberfläche zu

Null machen, indem man mit Kottler diejenige Eigenschaft, welche die Kirchhoffsche Näherung zeigt, zur Bedingung eines „strengen" Beugungsproblems deklariert. Man verwickelt sich dadurch in zweierlei Hinsicht in Widersprüche: erstens, weil der „Kirchhoffsche Schirm", wie bekannt, nur für die Primärstrahlung schwarz, für die gebeugte Welle dagegen durchsichtig ist; zweitens, weil auch die schwärzeste Oberfläche eine streifende Welle vollständig reflektieren muß. Hieran scheitert der Beweis von Ignatowsky[7], daß die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung dem schwarzen Schirm angemessen sei. Er nimmt zum Beweise nämlich an, daß bei der Schwenkung einer schwarzen Halbebene die Beugungserscheinung ungeändert bleibt; das kann man aber nur annehmen, solange man die Stellung streifender Inzidenz nicht berührt! Als ideal schwarz kann man eben nicht eine Oberfläche, sondern nur ein unbegrenzt tiefes Loch ansehen, welches man jedoch im schlichten physikalischen Raum nicht unterbringen kann. Man braucht dazu einen Riemannschen Raum, und zwar muß dieser, damit nicht ein Teil der durch den Schlund verschlungenen Strahlung wieder erscheint, unendlich viele Blätter haben. Es kommt also nur die Sommerfeldsche Lösung im unendlichblättrigen Raum für diese mathematische Idealisierung in Frage. Physikalisch ist dagegen der völlig schwarze Schirm überhaupt keine Idealisierung, sondern eine grobe Näherung.

Doch muß (in Übereinstimmung mit Kottler) hervorgehoben werden, daß die Kirchhoffsche Beugungstheorie in unserer Darstellung nicht ein überbestimmtes Randwertproblem[8], sondern eine *eindeutig bestimmte Sprungwertaufgabe* ist. Man kann die Sprungwerte von u *und* $\partial u/\partial n$, bzw. $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{H}$, auf einer Fläche willkürlich vorgeben und bestimmt dadurch die Funktion im ganzen Raum (also innerhalb und außerhalb der Fläche) eindeutig. Die gebeugte Welle kann man durch Überlagerung von Elementarwellen herstellen, welche unabhängig voneinander von den Flächenelementen ausgehen, freilich nicht nur nach vorwärts, sondern auch zurück. Man darf damit der Kirchhoffschen Formulierung des Huygensschen Prinzips doch wohl einen guten physikalischen Sinn unterlegen, muß sie also nicht als bloße „mathematische Fiktion" bezeichnen (von Laue[8]).

Meinem verehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat Sommerfeld, von dem mancher tragende Pfeiler im Gebäude der Beugungstheorie herrührt, sei der bescheidene Baustein, den ich mit dieser Mitteilung beitrage, zur Vollendung seines 80. Lebensjahres in dankbarer Liebe gewidmet.

[7] Ignatowsky, Ann. Physik **77**, 589 [1925].

[8] S. dazu etwa den Artikel „Beugung" (M. v. Laue) in Handb. d. Experimentalphysik, Akad. Verl.Ges., Leipzig 1928, Bd. XVIII, bes. S. 298.

Strenge Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe

Von Joseph Meixner

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **3a**, 506—518 [1948]; eingegangen am 15. Juli 1948)

Herrn Geheimrat Prof. Dr. A. Sommerfeld zu seinem 80. Geburtstage gewidmet

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe wird streng gelöst. Die Beugung an der kreisförmigen Öffnung in der vollkommen leitenden, unendlich ausgedehnten Ebene läßt sich vermittels einer gegebenen Verallgemeinerung des Babinetschen Prinzips auf das erste Problem zurückführen.

I. Formulierung des Beugungsproblems

In der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an Objekten endlicher Ausdehnung liegt stets folgendes Problem vor. Eine gegebene einfallende Welle fällt auf ein Hindernis, ein beugendes Objekt, und es ist eine auslaufende Welle zu suchen, die sich in großer Entfernung wie eine Kugelwelle mit richtungsabhängiger Amplitude verhält, und die, zur einfallenden Welle addiert, auf dem beugenden Objekt gewissen Randbedingungen genügt. Die Art dieser Randbedingungen